УДК 517.987

КОНЕЧНЫЕ КЛАСТЕРЫ НА ПЛОСКИХ МОЗАИКАХ
Часть III. Теорема о внешней границе[10)]

Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Введено понятие о внешней границе конечных кластеров на трёхмерных периодических графах и для этого случая доказан аналог теоремы Кестена о её топологической структуре.

Ключевые слова: периодический граф, случайное бернуллиевское поле, перколяция, кластер, внешняя граница.

1. Введение. Настоящая статья является завершающей частью работы, первые две части которой опубликованы в [1],[2]. Во второй части настоящей работы был сформулирован т.н. GL-алгоритм, посредством которого конструировались плоские графы без концевых вершин. Класс всех таких плоских графов в дальнейшем мы будем называть классом PGWE. Алгоритм построения графов этого класса состоит в следующем.[11)]

Материалом для применения алгоритма являются циклы. Термином *цикл* мы обозначаем граф γ (далее, циклы равно как и произвольные пути на графах обозначаются малыми греческими буквами), который представляет собой несамопересекающийся замкнутый путь, то есть $\gamma = \langle V_\gamma, \Phi_\gamma \rangle$, где множество связности представимо в виде $\Phi_\gamma = \{\{x_j, x_{j+1}\}; j = 1 \div n\}$, $x_{n+1} = x_1$ с множеством вершин $V_\gamma = \{x_i; i = 1 \div n\}$. Числовая характеристика $n \equiv |\gamma|$ такого графа называется *длиной цикла*.

Пару $\langle \gamma, \sigma \rangle$, где γ – цикл и σ – путь, составляющий его собственную часть, называется *оснащённым циклом*. Путь σ представляет собой подграф $\langle V_\sigma, \Phi_\sigma \rangle$, $V_\sigma = \{x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+l}\}$, $\Phi_\sigma = \{\{x_{k+j}, x_{k+j+1}\};\ j = 0 \div (l-1)\}$, $l = |\Phi_\sigma| \equiv |\sigma|$ – длина пути (нумерация вершин здесь понимается по $\mathrm{mod}(n-1)$).

Упорядоченный набор $\langle \langle \gamma_j, \sigma_j \rangle; j = 1 \div n \rangle$ оснащённых циклов назовём *согласованным*, если $s_1 = s_2$ и, для любого $m = 2 \div (n-1)$, имеет место

$$l_1 + \sum_{j=2}^{m} (l_j - 2s_j) > s_{m+1}\,,$$

где $s_j = |\sigma_j|$, $|\gamma_j| = l_j$, $j = 1 \div n$.

GL-алгоритм применяется к согласованным последовательностям оснащённых циклов, и результатом его применения к такой последовательности длины n является семейство плоских графов G_n из класса PGWE и с n внутренними (конечными) гранями. Причём циклы γ_j, $j = 1 \div n$ являются границами этих граней.

[10]Работа выполнена в рамках ФЦП ГК № 02.740.11.0545

[11]Следует упомянуть, что подход к исследованию плоских графов, основанный на сходной комбинаторной идее, разрабатывался в [3],[4].

Необходимо подчеркнуть, что циклы, к которым применяется GL-алгоритм, понимаются как отдельные независимые друг от друга графы, заведомо, являющиеся плоскими. Это замечание уместно в связи с тем, что циклы, рассматриваемые как подграфы неплоских графов, могут быть неплоскими только вследствие своего размещения на этих графах. Такой подход порождает т.н. «теорию узлов» [5].

Результатом реализации m шагов алгоритма $m = 1 \div (n-1)$ является плоский граф G_{m-1} из PGWE ($G_0 \equiv \gamma_1$). На каждом $(m-1)$-м шаге применения алгоритма производится операция склеивания (см. [1]) плоского графа, полученного на предыдущем шаге алгоритма с циклом γ_m, причём склеивание производится по пути σ_m, оснащению цикла γ_m, с путём такой же длины, выбранным произвольно на внешней границе графа G_{m-1}. При этом очень важно соблюдение т.н. условия *согласования* циклов. Образно, это условие сводится к тому, что приклеивание нового цикла должно производиться таким образом, чтобы не образовывалось «дырок».

Таким образом, фиксированная последовательность $\langle\langle\gamma_j, \sigma_j\rangle; j = 1 \div n\rangle$ оснащённых, согласованных циклов не определяет однозначно получаемый в результате применения GL-алгоритма плоский граф, а напротив, результатом его применения является целое семейство плоских графов из класса PGWE. Эта неоднозначность связана с тем, что на каждом m-м шаге построения имеется произвол в выборе того пути, который входит в состав внешней границы плоского графа G_{m-1}, построенного на предыдущем шаге, и по которому осуществляется операция склеивания.

С указанной неоднозначностью связана также другая неоднозначность – один и тот же плоский граф из класса PGWE может быть получен в результате применения GL-алгоритма к различным последовательностям оснащённых циклов. Все такие последовательности (при фиксированном погружении конструируемого графа в $\mathbb{R}^2$) являются различными упорядочениями множества $\{\langle\gamma_j, \sigma_j\rangle; j = 1 \div n\}$ оснащённых циклов, естественно, что в этих упорядочениях должно выполняться условие согласования.

Заметим, что построение плоского графа согласно GL-алгоритму, заведомо определяет и его погружение в евклидову плоскость (с точностью до непрерывных деформаций самой плоскости погружения).

Во второй части настоящей работы была доказана теорема о том, что каждый плоский граф без внешних вершин может быть представлен как результат применения GL-алгоритма к некоторой последовательности оснащённых циклов. Это утверждение позволяет строить доказательства утверждений общего характера относительно плоских графов, не привлекая геометрических соображений, связанных с конкретным их погружением в плоскость, а рассуждая только комбинаторно-алгебраическим образом посредством индукции по числу граней плоского графа, т.е. по длине согласованной последовательности оснащённых циклов.

В этой заключительной части работы мы установим важное свойство плоских графов без концевых вершин, связанное с их погружением в плоскость и на его основе, построим альтернативное (без привлечения теоремы Жордана о т.н. замкнутой жордановой кривой на плоскости) доказательство теоремы Г.Кестена о топологической структуре внешней границы конечного кластера, расположенного на мозаике. В изложении материала мы сохраняем все термины и обозначения, введённые в первых двух частях.

2. Аналог теоремы Жордана для плоских графов. Здесь будет доказан аналог теоремы Жордана для плоских графов класса PGWE. Не имеет большого смысла формулировать это утверждение аналогично тому, как это делается для замкнутых кривых на $\mathbb{R}^2$ [6]. А именно, следующее утверждение: *любой несамопересекающийся цикл γ на плоском графе $G = \langle V, \Phi \rangle$ разбивает множество вершин $V \setminus \{\gamma\}$ на два класса так, что каждый путь $\gamma(x, y)$, соединяющий две вершины x и y из разных классов, имеет непустое пересечение с циклом γ*, с одной стороны, является довольно очевидным, а, с другой стороны, не очень значимо. Это связано с тем, что вырезание из плоского графа произвольного цикла γ вместе со всеми ребрами, инцидентными его вершинам, приводит к развалу графа на несколько несвязанных подграфов. Тогда, с одной стороны, тривиальным образом, каждый путь на исходном графе, соединяющий две вершины из разных подграфов, обязан пересекать цикл γ (см. граф из Примера 4), а, с другой стороны, распределение вершин $V \setminus \{\gamma\}$ только по двум классам оказывается весьма произвольным.

Утверждение, аналогичное теореме Жордана, приобретает смысл при фиксации гомеоморфного погружения плоского графа G в $\mathbb{R}^2$ (либо на сферу, что, как будет видно далее, безразлично), когда имеет смысл говорить о *внутренних* и о *внешних* относительно цикла γ вершинах (в случае погружения на сферу, такая терминология является довольно условной).

Зафиксируем погружение плоского графа G в $\mathbb{R}^2$ с n гранями. Это погружение может быть построено в результате применения GL-алгоритма к согласованной последовательности оснащённых циклов. Рассмотрим весь класс $\mathcal{K}_G$ таких последовательностей, применение GL-алгоритма к каждой из которых приводят к одному и тому погружению графа G. Пусть γ – произвольный цикл на графе G. Тогда в классе $\mathcal{K}_G$ найдется такая последовательность, что цикл γ будет служить внешней границей плоского графа G_m, получаемого на каком-то m-м шаге ($m \leqslant n$) применения GL-алгоритма. Поэтому множество вершин графа G, не принадлежащих G_m, и цикл γ, называются *внутренними по отношению к* γ. Остальные вершины графа G называются *внешними по отношению к* γ вершинами.

Легко видеть, что данное определение внутренних вершин не зависит от выбора той последовательности, для которой цикл γ появляется в виде внешней границы в процессе применения GL-алгоритма.

После введения понятия внутренних вершин по отношению к фиксированному циклу на графе G, утверждение, о котором идет речь в этом пункте, формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $\langle V, \Phi \rangle$ – конечный связный плоский граф и γ – лежащий в нем несамопересекающийся цикл. Если x – внутренняя и y – внешняя вершины по отношению к циклу γ, то любой путь $\gamma(x, y)$ имеет непустое пересечение с γ, $\{\gamma(x, y)\} \cap \{\gamma\} \neq \varnothing$.*

□ Доказательство строится индукцией по числу граней n. При $n = 2$ граф состоит из одного несамопересекающегося цикла γ и имеет две грани. При этом вершин, не входящих в состав цикла нет, и поэтому утверждение теоремы имеет место тривиальным образом.

Пусть теперь утверждение теоремы верно для любого связного плоского графа с числом граней равным n. Рассмотрим произвольный связный плоский граф $G_{n+1} = \langle V_{n+1}, \Phi_{n+1} \rangle$, которого число граней равно $(n+1)$. Нужно различать два случая, в зависимости от того, является ли цикл γ, о котором идет речь в утверждении теоремы, внешней границей графа G_{n+1} или это положение не имеет места.

В первом случае, множество внешних по отношению к γ вершин пусто, и поэтому утверждение теоремы тривиально. Во втором случае, найдется грань с границей γ_{n+1}, которая является внешней при данном погружении графа, причем вырезание указанной грани из графа G_{n+1} превращает этот граф в такой плоский граф $G_n = \langle V_n, \Phi_n \rangle$ с n гранями, который целиком содержит цикл γ. Тогда для этого графа, по предположению, справедливо утверждение теоремы. Пусть x – произвольная внутренняя и y – внешняя по отношению к γ вершины, причем $y \in V_n$. Тогда, согласно сделанному предположению, множество вершин любого пути $\gamma(x,y)$ обязательно имеет непустое пересечение с $\{\gamma\}$. Пусть теперь вершина y содержится в $V_{n+1} \setminus V_n$, то есть в той части границы γ_{n+1} грани, но не входит состав внешней границы графа G_n. Тогда, любой путь $\gamma(x,y)$ обязательно проходит через одну из вершин z_1 или z_2, которые являются концами пути, образованного вершинами, общими для цикла γ_{n+1} и внешней границы графа G_n. Обе вершины z_1 и z_2 принадлежат V_n. Поэтому любой путь $\gamma(x,z_1)$, а также любой путь $\gamma(x,z_2)$ проходят через одну из вершин цикла γ. Следовательно, этим свойством обладает любой путь $\gamma(x,y)$. ■

Далее мы используем понятие бесконечного графа типа *мозаики*, введенное во второй части работы [2].

Пусть $\mathcal{M} = \langle V, \Phi \rangle$ – мозаика и γ – несамопересекающийся цикл на ней. Этот цикл лежит во всех графах G_n класса PGWE с достаточно большим номером, взятых из последовательности графов, порождающих мозаику. Вершина x называется внутренней (внешней) по отношению к циклу γ, если она является внутренней (внешней) по отношению к γ во всех графах G_n, обладающих указанным свойством. Из этого определения и Теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие. *Для любого несамопересекающегося цикла γ на мозаике $\mathcal{M}$ любой путь $\gamma(x,y)$, связывающий внутреннюю вершину x и внешнюю вершину y по отношению к γ, имеет непустое пересечение с γ.*

С ним связано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть на мозаике $\mathcal{M} = \langle V, \Phi \rangle$ имеется бесконечный несамопересекающийся путь γ без начальной вершины (например составленный из двух непересекающихся друг с другом путей $\gamma(z)$ и $\gamma'(z)$). Путь γ разделяет вершины $V \setminus \{\gamma\}$ на два класса так, что любой путь $\gamma(x,y)$ между вершинами x и y из разных классов пересекает γ.*

□ Рассмотрим последовательность $\langle G_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, порождающую мозаику. Зафиксируем номер $n \in \mathbb{N}$. Пусть z_n – вершина первого пересечения внешней границы графа G_n и z'_n – вершина первого пересечения этой границы путем γ. Путь $\gamma(z_n, z'_n)$ пересекает внешнюю границу графа только в двух вершинах z_n и z'_n. Тогда, имеется два цикла, порожденных этим путем и внешней границей графа. Обозначим эти циклы $\gamma_n^{(1)}$ и $\gamma_n^{(2)}$. Внутренние вершины относительно $\gamma_n^{(1)}$ являются внешними по отношению к $\gamma_n^{(2)}$ и наоборот. Тогда внутренние вершины графа G_n разделяются на два класса: внутренние вершины для цикла $\gamma_n^{(1)}$ и внутренние вершины для цикла $\gamma_n^{(2)}$. Вершины x и y находятся внутри графа G_n с достаточно большим номером. Поэтому, согласно Теореме 1, любой путь $\gamma(x, y)$, содержащийся при достаточно большом значении n внутри G_n, обязательно пересекает путь $\gamma(z_n, z_n')$. Так как при $n \to \infty$ путь $\gamma(z_n, z_n')$ стремится в теоретико-множественном смысле к пути γ, то утверждение теоремы получается переходом к пределу $n \to \infty$. ■

Замечание. В соответствии с разбиением каждым несамопересекающимся циклом γ множества $V \setminus \{\gamma\}$ мозаики $\mathcal{M}$ на внешние и внутренние по отношению к γ, все грани этой мозаики также разбиваются естественным образом на два непересекающихся класса внутренних и внешних граней. Грань называется *внутренней по отношению к циклу* γ, если в состав ограничивающего ее цикла входят внутренние относительно γ вершины. Наоборот, грань называется *внешней относительно цикла* γ, если в состав ограничивающего ее цикла входят внешние относительно γ вершины. Согласно доказанной теореме, такое определение корректно, так как в границу каждой грани не могут одновременно входить и внешние, и внутренние вершины.

3. Теорема о внешней границе конечного кластера на мозаике. Все связные подграфы мозаики (конечные или бесконечные) мы будем называть *кластерами*. Множества их вершин мы будем обозначать посредством буквы W.

Пусть $G_W = \langle W, \Phi_W \rangle$ – конечный кластер на мозаике $\mathcal{M} = \langle V, \Phi \rangle$. Множество $V \setminus W$ разбивается на два непересекающихся класса V_- и V_+ по следующему признаку. К классу V_+ отнесем те вершины x, из которых существует бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma(x)$ на мозаике, не имеющий общих вершин с W. Наоборот, к классу V_- отнесем те вершины, для которых такого бесконечного пути не существует.

Для того чтобы установить простейшие свойства конечных кластеров, связанные с множествами $V_\pm$ введем следующие понятия и докажем связанные с ними утверждения.

Лемма 1. *Для любой вершины x мозаики $\mathcal{M}$ существует расширяющаяся последовательность графов $G_n = \langle V_n, \Phi_n \rangle$ класса PGWE такая, что $V_1 = \{x\}$, $\Phi_1 = \varnothing$ и $G_n \to \mathcal{M}$ при $n \to \infty$.*

□ Графы $G_n = \langle W_n, \Phi_{W_n} \rangle$, $n > 1$ порождаются посредством применения неограниченно продолжающегося GL-алгоритма к бесконечной согласованной последовательности $\langle \langle \gamma_n, \sigma_n \rangle; n \in \mathbb{N} \rangle$ оснащённых циклов, на основе которой собирается мозаика $\mathcal{M}$. Эта последовательность одновременно определяет погружение этой мозаики в $\mathbb{R}^2$ с точностью до непрерывных деформаций плоскости. При этом $W_n = \bigcup_{k=1}^{n} \{\gamma_k\}$, $\Phi_{W_n} = \{\{x, y\} \in \Phi; x, y \in W_n\}$. ■

Введенные выше понятия множеств внутренних и внешних вершин, применимы для любых бесконечных графов и конечных подграфов в них. Как показывают приводимые ниже примеры, в общем случае, эти множества могут обладать аномальными свойствами: множество V_- может быть бесконечно, а множество V_+ может быть пустым.

Пример 1. Пусть $G = \langle V, \Phi \rangle$, где $V = \{x_k; k \in \mathbb{Z}\}$, $\Phi = \{\{x_k, x_{k+1}\}; k \in \mathbb{N}_+\} \cup \{\{x_0, x_{-k}\}; k \in \mathbb{N}\}$. Тогда, положив $W = \{x_0\}$, имеем $V_- = \{x_{-k};\ k \in \mathbb{N}\}$, $|V_-| = \infty$ и $V_+ = \{x_k; k \in \mathbb{N}\}$.

Пример 2. Пусть граф $G = \langle V, \Phi \rangle$ определяется множеством вершин $V = \{x_k; k \in \mathbb{N}_+\}$ и множеством смежности

$$\Phi = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\{x_0, x_j\}; j = 1 + k(k-1)/2 \div k(k+1)/2\}\,.$$

На этом графе нет бесконечного несамопересекающегося пути. Поэтому $V_+ = \varnothing$ и $V_- = V \setminus \{x_0\}$ при $W = \{x_0\}$, так как любой бесконечный путь на графе пересекает вершину x_0.

Легко видеть, что одной из причин аномалии, которую представляют приведенные примеры, является то, что в сконструированных графах, вершина x_0 имеет бесконечный индекс. Такое положение не реализуется на мозаике. В связи с этим, в противоположность приведенным примерам, ниже доказываются утверждения о том, что на мозаиках множество V_- обязательно конечно, и, следовательно, множество V_+ бесконечно.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{M}$ – мозаика. Для любого конечного подграфа $G = \langle W, \Phi_W \rangle$ класса PGWE и любой вершины $x \notin W$ существует бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma(x)$ такой, что $\{\gamma(x)\} \cap W = \varnothing$.*

□ Не ограничивая общности можно считать, что граф $G = \langle W, \Phi_W \rangle$ является членом расширяющейся последовательности графов класса PGWE, о которой речь идет в формулировке Леммы 1. Пусть его номер в этой последовательности не превосходит m, $W \subset W_m$, но при этом $x \notin W_m$. Далее, не ограничивая общности, можно считать, что номер m выбран так, что W_{m+1} содержит вершину x. В противном случае, в последовательности $\langle G_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ можно выбрать граф с номером, который превосходит m и который обладает указанным свойством.

Последовательность $\langle G_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ порождает бесконечную мозаику посредством GL-алгоритма. Это означает, что каждый граф G_{n+1}, $n \in \mathbb{N}$ в ней отличается от предыдущего графа G_n только одной гранью с границей в виде цикла γ_{n+1} с оснащением σ_{n+1}, $n \in \mathbb{N}$. Приклеивание этой грани к внешней границе графа G_n по оснащению σ_{n+1} превращает его в граф G_{n+1}. Не ограничивая общности, согласно тому, что $x \in G_{m+1}$, можно считать, что $x \in \{\gamma_{m+1}\}$ и эта вершина не входит в оснащение цикла.

Рассмотрим часть последовательности $\langle G_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ с номерами $n \geqslant m$. Такая подпоследовательность соответствует согласованной последовательности оснащенных циклов $\langle \gamma_n; n \geqslant m \rangle$, в которой, в качестве γ_m, можно выбрать внешнюю границу графа G_m. На каждом цикле γ_n, $n > m$ найдётся вершина x_n, лежащая за пределами соответствующего циклу оснащения σ_n. При этом положим $x_{m+1} = x$.

Последовательность $\langle \gamma_n; n \geqslant m \rangle$ и соответствующую ей последовательность $\langle x_n; n \geqslant m \rangle$ будем считать упорядоченной таким образом, что каждый последующий цикл γ_{n+1}

имеет общую границу с предыдущим циклом γ_n в процессе применения GL-алгоритма. При этом $x_m \equiv x$. Тогда существуют непересекающиеся пути $\gamma(x_n, x_{n+1})$, составляющиеся из части цикла γ_n и части цикла γ_{n+1}, причем эти части не входят в соответствующие этим циклам оснащения, $\gamma(x_n, x_{n+1}) = \langle \gamma(x_n, z_n), \gamma(z_n, x_{n+1}) \rangle$. Здесь, вершина z_n лежит на цикле γ_n, но не является конечной вершиной оснащения σ_n, и при этом она лежит на цикле γ_{n+1}. Кроме того, вершина z_n является конечной вершиной оснащения σ_{n+1}.

Пути $\gamma(x_n, x_{n+1})$, по построению, не пересекаются с W_m. Тогда бесконечный путь $\gamma_\infty(x) = \langle \gamma(x, x_{m+1}), \gamma(x_{m+1}, x_{m+2}), \ldots \rangle$ не пересекается с W_m и, кроме того, содержит бесконечное множество $\{x_n; n \geqslant m\}$ попарно несовпадающих друг с другом вершин. Построим на основе этого пути бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma(x)$.

Отметим на пути $\gamma_\infty(x)$ вершину y_{l_1}, являющейся первой его вершиной, в которой происходит его самопересечение. Таким образом, начальный отрезок пути $\gamma_\infty(x)$, который мы обозначим посредством $\gamma(x, y_{l_1})$, – несамопересекающийся, и $|\gamma(x, y_{l_1})| = l_1 > 0$. Найдем, далее, номер l_1' той компоненты в пути $\gamma_\infty(x)$, $l_1' > l_1$, где происходит последнее самопересечение пути $\gamma_\infty(x)$ в вершине y_{l_1}, то есть $y_{l_1} = y_{l_1'}$. Такой номер найдется, так как каждая вершина пути $\gamma_\infty(x)$, согласно его построению, может появляться в нем не более двух раз. Выбросим из пути $\gamma_\infty(x)$ конечный его участок $\gamma(y_{l_1}, y_{l_1'})$. В результате, получим бесконечный путь $\gamma_1(x)$, у которого на начальном отрезке длины $l_2 > l_1$ не имеется самопересечений, где $l_2 = |\gamma_1(x, y_{l_2})|$ и y_{l_2} – первая вершина в пути $\gamma_1(x)$, в которой происходит самоперсечение.

Рассмотрим конечный путь $\gamma_1(y_{l_2}, y_{l_2'})$ – отрезок пути $\gamma_1(x)$ такой, что l_2' – номер последнего посещения вершины y_{l_2} при движении по пути $\gamma_1(x)$ (т.е. $y_{l_2} = y_{l_2'}$). Вырежем этот участок из пути $\gamma_1(x)$. В результате, получим бесконечный путь $\gamma_2(x)$, у которого на начальном отрезке длины $l_3 > l_2$ не имеется самопересечений, где l_3 – номер вершины в пути $\gamma_2(x)$, в которой происходит первое самопересечение. Тогда начальный отрезок $\gamma_2(x, y_{l_3})$ пути $\gamma_2(x)$, где $|\gamma_2(x, y_{l_3})| = l_3 > l_2$, не содержит самопересечений. Продолжая этот процесс, на k-м шаге построения будет получен бесконечный путь $\gamma_k(x)$, у которого начальный отрезок $\gamma_k(x, y_{l_{k+1}})$ не имеет самопересечений и $|\gamma_k(x, y_{l_{k+1}})| = l_{k+1} > l_k$ и $y_{l_{k+1}}$ – первая вершина его самопересечения. Тогда, обязательно, найдется номер $l_{k+1}' > l_{k+1}$ компоненты пути $\gamma_k(x)$, которому соответствует последнее самопересечение пути γ_k в вершине $y_{l_{k+1}}$. Вырезав из $\gamma_k(x)$ конечный отрезок $\gamma_k(y_{l_{k+1}}, y_{l_{k+1}'})$, получим бесконечный путь $\gamma_{k+1}(x)$ и т.д. Продолжая процесс построения путей $\gamma_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ неограниченно, в результате, получим бесконечную последовательность $\langle \gamma_k(x); k \in \mathbb{N} \rangle$ бесконечных путей такую, что каждый путь $\gamma_{k+1}(x)$ в ней является частью пути $\gamma_k(x)$ и на отрезке длины l_{k+1} последнего не имеется самопересечений.

Составим путь $\gamma(x) = \langle \gamma_\infty(x, y_{l_1}), \gamma_1(y_{l_1}, y_{l_2}), \gamma_2(y_{l_2}, y_{l_3}), \ldots \rangle$, который является бесконечным, так как путь, получаемый из первых k членов этой последовательности $\langle \gamma'(x, y_{l_1}),\ \gamma_1(y_{l_1}, y_{l_2}), \ldots, \gamma_{k-1}(y_{l_{k-1}}, y_{l_k}) \rangle$, имеет длину l_k и при этом

$$\lim_{k \to \infty} l_k = \infty\,.$$

Путь $\gamma(x)$ не имеет самопересечений по построению. Так как этот путь является частью пути $\gamma'(x)$, то он не пересекается с W_m. ■

Следствие. *Для любого конечного кластера $\langle W, \Phi_W \rangle$ на мозаике $\mathcal{M}$ множество V_- конечно и множество V_+ бесконечно.*

□ Так как множество W конечно, и имеет место $W_n \to V$ при $n \to \infty$ для множеств W_n вершин графов G_n – членов последовательности в формулировке Леммы 1, то найдется номер $m \in \mathbb{N}$ такой, что $W_m \supset W$. Тогда $V_- \subset W_m$, так как из любой вершины $x \notin W_m$, согласно Лемме 2, найдется бесконечный несамопересекающийся путь, который не имеет пересечений с W_m. Так как $|W_m| < \infty$, то $|V_-| < \infty$. Кроме того, $V_+ = V \setminus V_-$, и поэтому $|V_+| = \infty$. ■

Введем множество $\partial W = \{y \in V_+ : \exists (x \in W : x\varphi y)\}$. Это множество будем называть *границей* кластера G_W, а его элементы – приграничными вершинами.

Множество $\partial_- W$, определяемое как $\partial_- W = \{x \in W : \exists (y \in \partial W : x\varphi y)\}$, назовем *внутренней границей*, а его элементы – граничными вершинами.

Определение 1. *Множество*

$$\partial_+ W = \{y \in \partial W : \exists (\gamma(y) \subset \mathcal{M} : \{\gamma(y)\} \cap [(\partial W \cup W)] = \{y\})\}$$

называется внешней границей кластера G_W.

Таким образом, согласно определению, $\partial_+ W \subset \partial W$.

Лемма 3. *Для любого конечного кластера $\langle W, \Phi_W \rangle$ на мозаике множество ∂W приграничных вершин конечно.*

□ На мозаике индекс каждой вершины конечен. Так как для каждой вершины x из ∂W существует вершина $y \in W$ такая, что $x\varphi y$, то имеет место неравенство

$$|\partial W| \leqslant |\partial_- W| \cdot \max\{|\mathrm{ind}(x)|; x \in \partial_- W\},$$

и имеет место включение $\partial_- W \subset W$, то есть множество $\partial_- W$ конечно, то множество ∂W конечно. ■

Следствие. *Для любого конечного кластера $\langle W, \Phi_W \rangle$ на мозаике $\mathcal{M}$ множество $\partial_+ W$ конечно.*

□ Следует из включения $\partial_+ W \subset \partial W$ и утверждения Леммы 3. ■

Следующая теорема представляет собой аналог теоремы Жордана для границ конечных кластеров.

Теорема 3. *Если $x \in W$, $|W| < \infty$, то любой бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma(x)$ имеет общие вершины мозаики с внешней границей $\partial_+ W$ графа G_W.*

□ Так как число вершин в W конечно и $|\gamma(x)| = \infty$, то $\{\gamma(x)\} \cap \complement W \neq \varnothing$. Пусть x_m – первая вершина из этого пересечения. Тогда $x_{m-1} \in W$ и $x_m \varphi x_{m-1}$. Следовательно, $x_m \in \partial W$.

Если $x_m \in \partial_+ W$, то это та вершина, существование которой утверждается в формулировке теоремы. Если же $x_m \in \partial W \setminus \partial_+ W$, то, согласно Определению 1 множества $\partial_+ W$, бесконечный путь $\gamma(x_m)$ имеет непустое пересечение с $\partial_+ W$. Так как бесконечный путь $\gamma(x)$ представляет собой последовательное прохождение конечного пути

$\gamma(x, x_m)$, а затем, бесконечного пути $\gamma(x_m)$, то $\gamma(x)$ имеет непустое пересечение с $\partial_+ W$, $\{\gamma(x)\} \cap \partial_+ W \supset \{\gamma(x_m)\} \cap \partial_+ W \neq \varnothing$. ■

Следствие. *Для любого конечного кластера $\langle W, \Phi_W \rangle$ на мозаике множество $\partial_+ W$ не пусто.*

Пусть G_W конечный кластер с внешней границей $\partial_+ W$. Любая вершина $x \in V$ такая, что в состав любого несамопересекающегося пути $\gamma(x)$, $|\gamma(x)| = \infty$ обязательно входит, по крайней мере, одна вершина из $\partial_+ W$, не совпадающая с x, называется *внутренней по отношению к кластеру* G_W. Внутренние вершины могут принадлежать или не принадлежать W. Если все внутренние вершины кластера G_W принадлежат W, то такой кластер называется *заполненным.* Операцию присоединения к произвольному кластеру G_W всех его внутренних вершин, которые не принадлежат W, назовем *заполнением* кластера. Очевидно, что все вершины класса V_- являются внутренними по отношению к W.

Вершина x из $V \backslash W$, для которой найдется бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma(x)$, не имеющий, помимо x, вершин общих с $\partial_+ W$, мы будем называть *внешними по отношению к кластеру* W.

Пусть $\mathcal{M} = \langle V, \Phi \rangle$ – мозаика и $\langle G_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ – последовательность графов класса PGWE, на основе которой эта мозаика конструируется согласно GL-алгоритму из согласованной последовательности $\langle \langle \gamma_n, \sigma_n \rangle; n \in \mathbb{N} \rangle$ оснащенных циклов (см. Лемму 1), где каждый цикл γ_n понимается как подграф $\langle \{\gamma_n\}, \Phi_{\gamma_n} \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, $\Phi = \bigcup\limits_n \Phi_{\gamma_n}$. Для любого цикла γ_n, $n \in \mathbb{N}$ из этой последовательности, его заполнением называется подграф $\langle \{\gamma_n\}, \{\gamma_n\}^{(2)} \rangle$. При этом на графе имеется отмеченный путь σ_n (оснащение цикла γ_n). При склеивании заполненных циклов может возникнуть ситуация, когда вновь получаемый граф не удовлетворяет одному из условий, которые мы предъявляем к рассматриваемым нами графам. А именно, он может иметь кратные ребра, точнее, некоторые из его ребер могут стать двукратными. Это будет иметь место всякий раз, когда происходит склейка соответствующих циклов γ' и γ'' из последовательности, определяющей мозаику $\mathcal{M}$, по путям с длиной большей единицы. При этом на мозаике возникают вершины с индексом равным двум. Если такая ситуация действительно реализуется после склеивания указанных циклов, то, по определению, одно из удвоенных ребер удаляется и оставшееся ребро мы соотносим только с одной из склеиваемых граней (с той которая требуется по контексту изложения), а во второй грани такое ребро отсутствует. Так, при доказательстве Теоремы 5 выбор грани, к которой относится оставляемое ребро заполнения, фактически, связан с тем, чтобы эта теорема оставалась верной для графов, у которых имеются вершины с индексом равным 2, и для циклов, окружающих такие вершины.

Определение 2. [12] *Бесконечный граф $\mathcal{M}^* = \langle V, \Phi^* \rangle$, который получается применением GL-алгоритма к последовательности заполненных циклов $\langle \{\gamma_n\}, \{\gamma_n\}^{(2)} \rangle$ с соответствующими им отмеченными путями σ_n, $n \in \mathbb{N}$, когда каждый цикл γ_n с оснащением*

[12] Здесь, в отличие от [7], мы даём определение сопряжённого графа на основе разрабатываемого в настоящей работе комбинаторного подхода.

σ_n, $n \in \mathbb{N}$ в последовательности операций склеивания заменяется соответствующим ему заполненными циклом $\langle \{\gamma_n\}, \{\gamma_n\}^{(2)} \rangle$ с тем же оснащением, называется графом, сопряжённым по отношению к мозаике $\mathcal{M}$.

Таким образом, граф $\mathcal{M}^*$, сопряженный мозаике $\mathcal{M}$, строится на том же самом, что и $\mathcal{M}$ множестве вершин, но обладает более широким отношением смежности $\Phi^* = \bigcup_n \{\gamma_n\}^{(2)}$.

Согласно построению, сопряжённый граф $\mathcal{M}^*$, уже не является бесконечным плоским графом типа мозаики. Исключение составляют мозаики $\mathcal{M}$, у которых все грани треугольные. В этом случае $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$.

Несамопересекающийся цикл $\gamma = \langle x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1} \rangle$ называется *неспрямляемым* на графе $G = \langle V, \Phi \rangle$, если $\{x_i, x_j\} \notin \Phi$ для любых пар несоседствующих друг с другом в этом цикле вершин, то есть $i - j \neq 1 \bmod n$ и $i - j \neq (n-1) \bmod n$. Цикл длины 3 будем считать, по определению спрямляемым, если он определяет грань графа G класса PGWE при его погружении в $\mathbb{R}^2$. Это соглашение позволит нам упростить формулировку Теоремы 5. В противном случае (см. Пример 3), он неспрямляем согласно данному определению.

Пример 3. Пусть граф $G = \langle V, \Phi \rangle$ с $V = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ и $\Phi = \{\{x_0, x_i\}; i = 1, 2, 3\} \cup \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_1\}\}$ получается склейкой циклов длины 3, $\gamma_1 = \langle x_1, x_0, x_2, x_1 \rangle$, $\gamma_2 = \langle x_2, x_0, x_3, x_2 \rangle$, $\gamma_3 = \langle x_3, x_0, x_1, x_3 \rangle$ с оснащениями в виде соответствующих путей единичной длины $\sigma_1 = \langle x_0, x_2 \rangle$, $\sigma_2 = \langle x_0, x_3 \rangle$, $\sigma_3 = \langle x_1, x_0, x_3 \rangle$. Тогда цикл $V = \langle x_1, x_2, x_3, x_1 \rangle$ является внешней границей графа G при выбранном погружении, и эта граница имеет длину 3.

Теперь мы в состоянии сформулировать основные утверждения работы. Из них следующее является некоторым усилением теоремы, приведенной в [7].

Теорема 4. *Пусть зафиксировано взаимно непрерывное погружение мозаикп $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^2$. Если множество $\Delta = \partial_+ W$ является внешней границей какого-то кластера W, то в образе погружения это множество является неспрямляемым циклом в сопряжённом графе $\mathcal{M}^*$.*

□ Зафиксируем взаимно непрерывное погружение мозаики $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^2$ на основе последовательности $\langle G_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ графов класса PGWE.

Согласно следствию из Теоремы 3, множество Δ не пусто. Не ограничивая общности, будем считать кластер W заполненным, то есть $\partial W = \partial_+ W = \Delta$.

A. Введем в рассмотрение плоский граф G класса PGWE, который состоит из тех и только из тех граней, в состав границ которых входят вершины из $W \cup \partial_+ W$. Выделим из этого множества граней те, границы которых содержат вершины, не принадлежащие W, то есть все вершины из Δ являются вершинами этих циклов и каждый цикл имеет непустое пересечение с Δ. Обозначим посредством $\Gamma(W)$ множество всех циклов, соответствующих этим граням, из набора циклов, которые порождают граф G при реализации GL-алгоритма (и всю мозаику $\mathcal{M}$). Эти циклы являются границами граней из рассматриваемого множества. Тогда

$$\Delta \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma(W)} \{\gamma\}\,.$$

Поэтому все ребра внешней границы плоского графа G содержатся среди ребер циклов $\Gamma(W)$ и, наоборот, множество ребер каждого цикла $\gamma \in \Gamma(W)$ имеет непустое пересечение с внешней границей графа.

B. Рассмотрим цикл γ из $\Gamma(W)$. Связные части пересечения этого цикла с $\Delta \cup W$ представляют собой пути и при этом концевые вершины этих путей, по построению, являются вершинами из Δ. Тогда существует единственный путь σ в пересечении цикла γ с $\Delta \cup W$. В противном случае, если бы существовала еще одна связная часть этого пересечения – путь σ', то имелось бы, по крайней мере две вершины x и x', лежащие в различных промежутках между путями σ и σ' на цикле. Тогда y и y' – вершины, каждая из которых является ближайшей, соответственно, к x и x' и, одновременно, концевыми вершинами путей σ и σ'. Но это невозможно, так как эти концевые вершины принадлежат $\partial_+ W$, и поэтому из каждой из них имеются несамопересекающиеся бесконечные пути $\gamma(x)$ и $\gamma(x')$, непересекающиеся с $W \cup \Delta$, так как таковые имеются из φ-связных с ними вершин x и x'. Ребро $\langle x, x'\rangle$ принадлежит заполнению грани, соответствующей циклу γ. Поэтому, согласно Теореме 2, на мозаике, которая получается из $\mathcal{M}$ добавлением этого ребра в её множество смежности, имеется бесконечный несамопересекающийся путь $\alpha = \langle \gamma(x), \{x, x'\}, \gamma(x')\rangle$, который разбивает множество вершин $V \setminus \{\alpha\}$ на два класса таких, что любой путь из вершины одного класса к вершине другого класса, обязательно, пересекает путь α. При этом вершины y и y' находятся в разных классах. Так как множество $W \cup \partial_+ W$ связно, то существует путь $\gamma(y, y')$ на этом множестве связывающий эти вершины. Этот путь должен пересекать путь α, что невозможно согласно его построению. Таким образом, каждый цикл $\gamma \in \Gamma(W)$ имеет в пересечении с $W \cup \Delta$ единственный путь $\sigma(\gamma)$, и поэтому на каждом таком цикле γ имеется не более двух вершин из Δ.

C. Пересечение каждого цикла $\gamma \in \Gamma(W)$ с внешней границей графа G состоит из одного пути $\beta(\gamma)$. Это следует из процедуры построения графа G посредством GL-алгоритма.

D. Перенумеруем все пути β_k, $k = 1 \div m$ – части внешней границы графа G, которые начинаются на одной вершине внешней границы с индексом не меньшим трех и заканчиваются на другой такой же вершине. Нумерацию производим в порядке их прохождения всей внешней границы графа G.

E. Так как, согласно п.C, каждому пути однозначно соответствует цикл $\gamma \in \Gamma(W)$, то нумерация п.D порождает нумерацию всех циклов из $\Gamma(W)$. А именно, мы присваиваем номер k циклу γ из этого набора и записываем его в виде $\gamma := \gamma_k$, если $\beta_k = \beta(\gamma)$. Согласно доказанному в п.B каждый цикл γ_k имеет две вершины из Δ, причем так как два соседних цикла γ_k и γ_{k+1} имеют общую часть границы, то каждая из вершин, принадлежащих Δ, является общей для двух соседних циклов. В связи с этим, возникает нумерация всех вершин из Δ. А именно, мы пишем $y_k \in \gamma_k$, $y_k \in \gamma_{k-1}$ и $y_{k+1} \in \gamma_k$,

$y_{k+1} \in \gamma_{k+1}$. При этом $\Delta = \{y_k; k = 1 \div m\}$, где номер k понимается здесь и в следующем пункте по $\mathrm{mod}\, m$ добавлением единицы.

F. Каждые две следующих друг за другом вершины y_k и y_{k+1} связаны на графе $\mathcal{M}^*$ ребром, принадлежащим заполнению грани, связанной с циклом γ_k, $k = 1 \div m$. Поэтому $\Delta = \langle y_k; k = 1 \div m \rangle$, где этот цикл понимается в смысле φ^*-связности. Множество W, по построению, находится внутри цикла. ■

Следующие примеры показывают, что неспрямляемые циклы на сопряженных графах могут не являться внешними границами конечных кластеров.

Пример 4. Пусть плоский граф (фрагмент некоторой мозаики) $G = \langle V, \Phi \rangle$ класса PGWE, у которого $V = \{x_\pm\} \cup \{x_i; i = 1 \div 6\}$ и $\Phi = \{\{x_-, x_i\}; i = 1, 2, 3\} \cup \{\{x_+, x_i\}; i = 4, 5, 6\} \cup \{\{x_i, x_{i+1}; i = 1 \div 6\}\}$, где $x_7 \equiv x_1$ и его погружение таково, что внешней границей графа является цикл $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \rangle$. Вершины $x_\pm$ взятые по отдельности представляют собой два несвязанных кластера, каждый из которых состоит из одной вершины. При этом цикл $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \rangle$ не является внешней границей каждого из этих кластеров по отдельности, а, наоборот, является «внешней границей» для пары $\{x_-, x_+\}$. С другой стороны, этот цикл спрямляем связью $\langle x_3, x_6 \rangle$ или связью $\langle x_1, x_4 \rangle$.

Заметим, что для цикла $\langle x_1, x_3, x_4, x_6 \rangle$ вершины x_2 и x_5 можно рассматривать как внешние по отношению к нему, а вершины x_+ и x_- – как внутренние. Любой путь $\gamma(x_\pm, x_i)$, $i = 2, 5$, обязательно, пересекает этот цикл. Но точно также любой путь $\gamma(x_+, x_-)$ и любой путь $\gamma(x_2, x_5)$ пересекают этот цикл, и поэтому деление множества вершин $\{x_+, x_-, x_2, x_5\}$ на классы внутренних и внешних произвольно.

Пример 5. Следующий бесконечный плоский граф $\mathcal{M} = \langle V, \Phi \rangle$ типа мозаики называется квадратной решёткой. У этого графа $V = \mathbb{Z}^2$ и $\Phi = \{\{\langle i_1, i_2 \rangle, \langle i_1', i_2' \rangle\} : i_1' = i_1 \pm 1, i_2' = i_2$ или $i_1' = i_1, i_2' = i_2 \pm 1\}$. Рассмотрим неспрямляемый цикл с длиной равной 8:

$$\langle \langle 0,0 \rangle, \langle 0,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle, \langle 0,0 \rangle \rangle$$

на сопряженном графе. Этот цикл окружает пару не связанных на квадратной решетке одновершинных кластеров $\{\langle 1,1 \rangle\}$ $\{\langle 2,2 \rangle\}$, но не является внешней границей какого-либо конечного кластера. Однако, рассматриваемый цикл спрямляем ребром $\langle \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle \rangle$.

Докажем следующее утверждение. Оно является обратной теоремой по отношению к Теореме 4, которая отсутствует в [7].

Теорема 5. *Пусть зафиксировано взаимно непрерывное погружение мозаикп $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^2$. Для того чтобы непустое конечное множество Δ, в образе этого погружения, представляло собой внешнюю границу какого-либо конечного кластера достаточно, чтобы Δ было неспрямляемым циклом в образе сопряжённого графа $\mathcal{M}^*$.*[13)]

□ Пусть Δ – неспрямляемый цикл на $\mathcal{M}^*$. Добавим в множество смежности мозаики $\mathcal{M} = \langle V, \Phi \rangle$ ребра, входящие в этот цикл. В результате, получим мозаику $\mathcal{M}_\Delta = \langle V, \Phi \cup \Phi_\Delta \rangle$. Добавив конечный набор новых циклов, а именно тех, которые порождаются

13)Здесь в формулировке теоремы и в процессе ее доказательства мы не делаем различия между циклом Δ и множеством $\{\Delta\}$ его вершин.

введением новых ребер из Φ_Δ, которые отсутствовали на мозаике $\mathcal{M}$, но возникли на мозаике $\mathcal{M}_\Delta$, построим новую последовательность графов класса PGWE, которая порождает последнюю мозаику. Графы этой новой последовательности будем обозначать теми же символами G_n, $n \in \mathbb{N}$. Такое соглашение не приведет к недоразумению. В принятых обозначениях цикл Δ является внешней границей одного из графов $G_m = \langle W_m, \Phi_{W_m}\rangle$ последовательности $\langle G_n; n \in \mathbb{N}\rangle$, и этот цикл содержится во всяком графе G_n с достаточно большим номером $n > m$.

A. Допустим, что указанный граф $G_m = \langle W_m, \Phi_{W_m}\rangle$ класса PGWE не имеет внутренних вершин. Возможны два случая: 1) граф G_m является подграфом в мозаике $\mathcal{M}$ и 2) граф G_m таковым не является.

В первом случае, так как G_m не содержит внутренних вершин и его внешняя граница представляет собой неспрямляемый цикл, то все его ребра должны входить в состав внешней границы. Следовательно, G_m совпадает со своей внешней границей и, следовательно, состоит из одной грани (поэтому $m = 1$), которая является, таким образом, гранью мозаики $\mathcal{M}$. Но это возможно только при $|\Delta| = 3$. В противном случае, в заполнении грани имеются ребра, которые приведут к спрямляемости цикла – внешней границы G_m. При $|\Delta| = 3$, так как внутри грани с множеством Δ в качестве границы вершины отсутствуют, то такой цикл спрямляем по определению.

Во втором случае, подграф G_m содержит хотя бы одно ребро $\{x, y\}$, $x, y \in \Delta$, не принадлежащее Φ_{W_m}. Тогда, согласно построению мозаики $\mathcal{M}_\Delta$, это ребро принадлежит заполнению какой-то грани мозаики $\mathcal{M}$. Если границей этой грани является цикл γ, то $x, y \in \{\gamma\}$. Тогда одно из ребер, входящих в состав цикла γ и инцидентных либо вершине x, либо вершине y, обязательно находится в составе грани G_m, но не входит в состав цикла Δ. Следовательно, так как внутри цикла Δ нет вершин, то он является спрямляемым, что невозможно. Полученное противоречие доказывает непустоту множества внутренних вершин графа G_m.

B. Обозначим посредством W множество всех внутренних вершин цикла Δ. Покажем, что для каждой вершины x множества Δ существует вершина $y \in W$. Допустим противное – такая вершина отсутствует. Рассмотрим пару вершин x_-, x_+, соседних с вершиной x в цикле Δ, то есть $x\varphi^* x_\pm$.

Если оба ребра $\{x, x_\pm\}$ из Φ^* принадлежат Φ, то цикл Δ спрямляем посредством добавления ребра $\{x_-, x_+\}$ из заполнения грани.

Если одно из ребер $\{x, x_\pm\}$ принадлежит Φ, но не принадлежит Φ^*, то рассмотрим грань в заполнение которой входит ребро $\{x, x_-\}$. Тогда ребро $\{x, x_+\}$ входит в состав границы этой грани. Следовательно, цикл Δ спрямляем на мозаике $\mathcal{M}_\Delta$ посредством ребра $\{x_-, x_+\}$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда оба ребра $\{x, x_\pm\}$ не принадлежат Φ. Эти ребра не могут находиться в одной грани. В противном случае, цикл оказывается спрямляемым посредством введения ребра $\{x_-, x_+\}$, что невозможно. Так как указанные ребра находятся в заполнениях различных граней, то существуют ребра $\{x, y_\pm\}$, которые входят в состав границы, разделяющей эти грани. Если обе вершины $y_\pm \in W$, то существуют ребра $\{x, y_-\}$ и $\{x, y_+\}$, входящие в заполнения этих граней. Поэтому одна из вершин, например, y_- является внутренней по отношению к Δ, что противоречит определению множества W.

Полученные противоречия при рассмотрении различных возможностей, следующих из сделанного нами предположения, доказываю, для любой вершины $x \in \Delta$ существует вершина $y \in W$.

C. Докажем, что для любой вершины $x \in \Delta$ существует такой путь $\gamma(x)$, что $\{\gamma(x)\} \cap (W \cup \Delta) = \{x\}$. Пусть $x \in \Delta$, то есть x – вершина внешней границы графа G_m. Допустим, что эта вершина не связана ни с одной внешней по отношению к G_m вершиной. Как и в п.B, рассмотрим вершины $x_\pm$, соседние с вершиной x в цикле Δ, т.е. ребра $\{x, x_\pm\}$ принадлежат Φ_Δ.

Если оба ребра $\{x, x_\pm\}$ принадлежат Φ, то Δ – спрямляемый цикл за счет введения ребра $\{x_-, x_+\}$, которое присутствует в заполнении грани, внешней по отношению к G_m и в границу которой входит путь $\langle x_-, x, x_+\rangle$.

Пусть одно из ребер, например, $\{x_-, x\} \in \Phi$, а второе – $\{x_+, x\} \notin \Phi$. Тогда последнее ребро находится в заполнении какой-то грани, а $\{x, x_-\}$ входит в состав границы этой грани. Следовательно, цикл Δ спрямляем посредством ребра $\{x_-, x_+\}$.

Если оба ребра $\{x, x_\pm\}$ не принадлежат Φ, но принадлежат Φ_Δ, то существуют две соседние грани, заполнения которых содержат эти ребра. В противном случае, если они содержатся в заполнении одной грани, то вершина x не связана ни с одной из вершин W, что невозможно. Ввиду расположения ребер $\{x, x_\pm\}$ в заполнениях различных граней, найдутся два ребра $\{x, y_\pm\}$, входящие в состав границы, которая разделяет эти грани. Тогда одна из вершин $y_\pm$, например y_+, является внешней по отношению к G_m, и поэтому существует ребро $\{x, y_+\} \in \Phi$. Это противоречит сделанному предположению. Таким образом, для любой вершины $x \in \Delta$ найдется вершина y, внешняя по отношению к плоскому графу G_m класса PGWE и такая, что $x\varphi y$. Согласно Лемме 2, существует бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma(y)$ такой, что $\{\gamma(y)\} \cap (W \cup \Delta) \neq \varnothing$. Это приводит к тому, что бесконечный несамопересекающийся путь $\langle x, \gamma(y)\rangle$ имеет единственную вершину, общую с Δ.

D. Покажем, что множество W связно и, следовательно, представляет собой конечный кластер.

Допустим противное, что множество Δ не связно на мозаике $\mathcal{M}$. Рассмотрим его связную компоненту W', не совпадающую с W. Построим множество $\Delta' = \partial_+ W'$.

Пусть вершина $x \in \Delta' \setminus \Delta$. Тогда, согласно п.B, существует вершина $y \in W'$ такая, что $y\varphi x$ и имеется несамопересекающийся путь $\gamma(x)$, для которого $\{\gamma(x)\} \cap (\partial_+ W' \cup W') = \{x\}$. Так как $x \notin \Delta$, то вершина x может быть либо внутренней, либо внешней относительно цикла Δ.

Если x – внутренняя вершина, то она, по определению, принадлежит множеству W и, следовательно, находится в другой связной компоненте этого множества. С другой стороны, x φ-смежна с вершиной $y \in W'$, что исключает предыдущее утверждение. Полученное противоречие дает нам $\Delta' \setminus \Delta = \varnothing$.

Допустим, что $\Delta \setminus \Delta' \neq \varnothing$. При этом Δ', согласно Теореме 4, представляет собой несамопересекающийся неспрямляемый цикл. Но это означает, в силу $\Delta' \subset \Delta$, что цикл Δ' спрямляет цикл Δ, что невозможно по условию теоремы.

Таким образом, $\Delta \setminus \Delta' = \varnothing$ и, следовательно, $\Delta' = \Delta$. Следствием этого равенства является совпадение множеств W и W'. В самом деле, допустим противное: существует вершина $x \in W \setminus W'$, которая, по построению, является внутренней вершиной относительно Δ. С другой стороны, так как $\Delta = \partial_+ W'$, то $x \in \partial W' \setminus \partial_+ W'$. Следовательно, для этой вершины, существует вершина $y \in W'$ такая, что $x \varphi y$. Это противоречит тому, что $W \setminus W'$ не связно с W'. Полученное противоречие доказывает, что $W = W'$.

Из пп. A - D следует, что W – полный кластер с $\partial_+ W = \Delta$. ■

Литература

1. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Конечные кластеры на плоских мозаиках. Часть 1. Операции склеивания и разрезания // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2011. – 5(100);22. – С.140-152.

2. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Конечные кластеры на плоских мозаиках. Часть 2. Комбинаторное построение плоских графов // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2011. – 11(106);23. – С.179-188.

3. Whitney H. Non-separable and planar graphs // Trans. Amer. Math. Soc. – 1932. – 34. – P.339-364.

4. Whitney H. Planar graphs // Fund. Math. – 1933. – 21. – P.73-84.

5. Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов / Пер. с англ. — Череповец: Меркурий-Пресс, 2000. — 348 с. — ISBN 5-1148-0112-0.

6. Александров П.С. Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию / М.: Наука, 1875. – 368 с.

7. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians / H. Kesten. – Boston: Birkhauser, 1982.

FINITE CLUSTERS ON PLANE MOSAICS
III. External boundary theorem

E.S.Antonova, Yu.P.Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. The concept of external border of finite clusters on three-dimensional periodic graph. It is proved the analog of Kestens' theorem that concerns the topological structure of external border for such periodic graphs.

Key words: periodic graph, random Bernoulli field, percolation, cluster, external boundary.